f est continue et strictement décroissante sur]1,+∞[

elle réalise donc une bijection de]1,+∞[sur J = f(]1,+∞[)

$J = f(]1,+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f , \lim\limits_{x\to 1^+} f\ [=]1,+\infty\ [$

$fof(x) = f(f(x)) = \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \dfrac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = x$; $fof(x) = x$

b) $D_{f^{-1}} = D_f =]1,+\infty[$ et $fof(x) = x$

d'où : $f^{-1}(x) = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ pour $x \in]1,+\infty[$

$D_{f^{-1}} = D_f$
$f \circ f(x) = x$
$\Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$

EXERCICE№5

$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 1

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 1.

2) f est dérivable sur]1,+∞[et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-1} + 2\right) = +\infty$

3) * f est continue et strictement croissante sur]1,+∞[

elle réalise donc une bijection de]1,+∞[sur]2,+∞[

* soit $y = f^{-1}(x)$ avec : $x \geq 2$ et $y \geq 1$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{y-1} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{y-1} = x - 2$

$\Leftrightarrow y - 1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 5$

D'où : $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$

4) f^{-1} est dérivable sur [2,+∞[